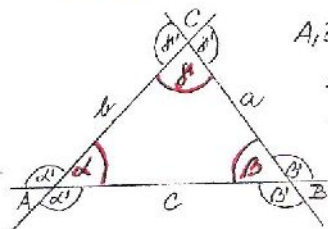


3. Trojúhelník

TROJÚHELNÍK (přímka 3 polohovosti uvnitř nebo 3 různorodé body neliežící v jedné přímce)

$$\triangle ABC = \rightarrow ABC \cap \rightarrow ACB \cap \rightarrow BCA$$



A, B, C... **vrcholy** AB, AC, BC... **strany**

$|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$ **délky stran**

$\angle BAC, \angle ACB, \angle ABC$ **vnitřní úhly** (koncent)

$\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$ **velikosti vnitřních úhlů**

α', β', γ' **mimoš úhly** (vedlejší úhly k vnitřním úhlům)

[mimoš α, β, γ označujeme přímo strany a úhly] $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, $\beta + \beta' = 180^\circ$, $\gamma + \gamma' = 180^\circ$

- součet vnitřních úhlů je přímý úhel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

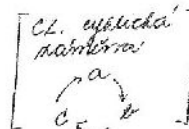
- mimoš úhel je roven součtu vnitřních úhlů při klírajících vrcholech

$$\alpha' = \beta + \gamma \quad \beta' = \alpha + \gamma \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST: Součet každých 2 stran Δ je větší než třetí strana

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

ne napadl nikakomý jediný: $|b - a| < c < |b + a|$ (OZ)



VZTAHY MEZI STRANAMI A ÚHLY

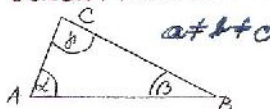
- proti shodným stranám leží shodné vnitřní úhly

- proti větší straně leží větší úhel a naopak

TYPY Δ

- podle délky stran

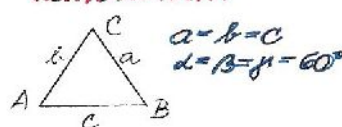
OBEČNÝ (RŮZNOSTRANNÝ)



ROVNORAMENNÝ

c... **protihrada**
a, b... **ramena**
 $a = b$, $\alpha = \beta$

ROVNOSTRANNÝ

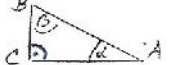


- podle velikosti vnitřních úhlů

OSTROUHLE (všechny úhly $< 90^\circ$)



PRAMOUHLE (úhel pravy)



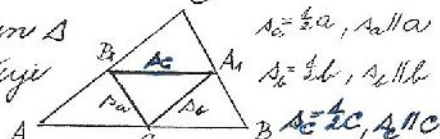
TUPOUHLE (1 úhel tupý)



- **STŘEDNÍ PŘÍČKA Δ** : úsečka spojující středy 2 stran Δ

- je rovnoběžná s 3 stranou Δ , jejíž střed spojuje

- délka je rovna $\frac{1}{2}$ délky této strany



- **VÝŠKA Δ** : úsečka, jejížmi krajními body jsou vrchol a pata kolmice vedené tímto vrcholem

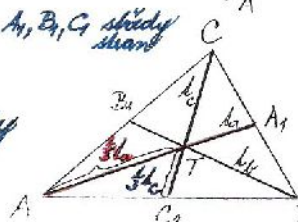
- přímky m Δ - **osy** Δ - **osy** Δ

- **TĚŽNICE Δ** : úsečka spojující vrchol Δ se středem

protější strany

- **půlúhelníky** Δ - **osy** Δ - **osy** Δ

- vzdálenost T od vrcholu Δ je rovna $\frac{2}{3}$ délky příslušné těžnice

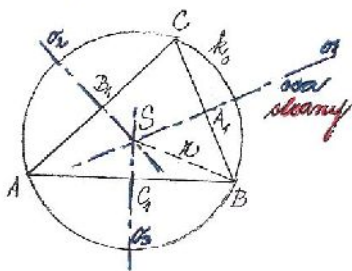


$$|AT| = \frac{2}{3} |AA_1| \quad (OZ)$$

- KRUŽNICE TROJÚHELNÍKU

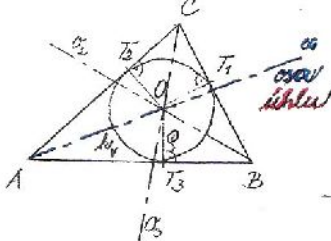
- OPSANÁ

střed S: průsečík OS STRAN
r... poloměr



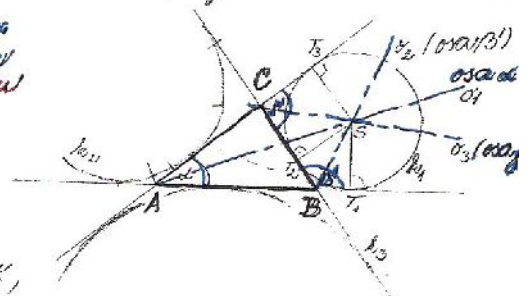
- VEPSANÁ

střed O: průsečík OS ÚHLŮ
ρ poloměr $\rho = \frac{1}{2} \cdot |OT_1| = \frac{1}{2} \cdot |OT_2|$
 T_1, T_2, T_3 body dotyku



- PŘÍPSANÁ

střed y: průsečík osy směr. úhlu a os strany nejdelší z sousedních směr. úhlů (ec. 3.474)



- SHODNOST Δ

$\Delta ABC \cong \Delta KLM$ při přeměstitelné přejdu bodů $A \rightarrow K, B \rightarrow L, C \rightarrow M$ (př. kapesu předslevení směrů v předslevení pořadí)

- o shodnosti Δ rozhodujeme podle nhl
2 Δ jsou shodné $\Leftrightarrow$ se shodují

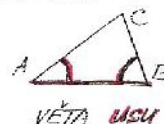
- v nhl 3 stranách



- v nhl 2 stranách a úhlu mezi nimi



- v nhl 1 straně a úhlu přilehlých k této straně



- v nhl 2 stranách a úhlu proti nim (ec. 3.474)



- PODOBNOST Δ

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (pořadí směrů, v předslevení pořadí)

- Prognostika $A'B'C'$ je podobný $\Delta ABC \Leftrightarrow \exists k > 0$ (kov. koeficient, poměr podobnosti)
 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ jsou shodné, pak platí:

$$|A'B'| = k|AB| \quad |AC'| = k|AC| \quad |BC'| = k|BC|$$

$$c' = kc$$

$$b' = kb$$

$$a' = ka$$

- pokud: $k > 1 \Rightarrow$ ZVĚŠENÍ

$k = 1 \Rightarrow$ SHODNOST

$k < 1 \Rightarrow$ ZMENŠENÍ

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

- ke prhl: $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \quad \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a':b':c' = a:b:c$

Bovs Δ jsou si podobné $\Leftrightarrow$ poměr každých 2 stran jednoho Δ je rovnal poměrů dílek příslušných stran druhého Δ

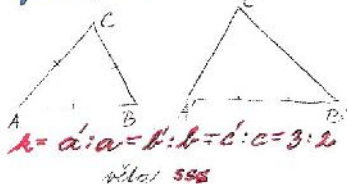
- kromě prhl: k - li $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (skof. k) a $\Delta A'B'C' \sim \Delta A'B'C''$ (skof. l) $\Rightarrow$
 $\Delta A'B'C'' \sim \Delta ABC$ s kof. podobnosti $k \cdot l$

k - li $\Delta A'B'C'$ podobný ΔABC s kof. podobnosti k , k - li ΔABC podobný $\Delta A'B'C'$ skof. pod $\frac{1}{k}$

- při dílekově podobnosti Δ myslíme

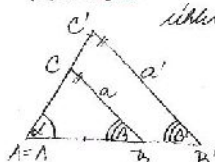
myšl. VĚTU SSS
($c' = kc, a' = ka, b' = kb, k > 0$)

2 Δ, které se shodují v poměru dílek všech 3 stran, jsou podobné



ale i VĚTU USU (2 Δ, které se shodují v 2 úhlech, jsou podobné)

VĚTU SUS (2 Δ, které se shodují v poměru dílek 2 stran a úhlu proti nim, jsou podobné)



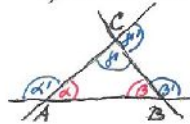
$A = A'$
 $B = B'$ (úhly soustavné, vsta')
VĚTA USU nebo SUS

PAT: v podobných Δ jsou si odpovídající TĚNICE, VĚSKY, POLOHĚ KRUŽNICE OPSANÉ (VEPSANÉ) v líněv poměru jako dílek odpovídající stran

Příklady

- 128 $\textcircled{1}$ jsou dány 2 úhly v mnohostěhu 72° a 86° . Vypočítejte velikosti vnějších a vnitřních úhlů Δ , jsou-li dány úhly

a) oba vnější $\alpha = 72^\circ, \beta = 86^\circ$



$$\gamma = 180^\circ - (72^\circ + 86^\circ)$$

$$\gamma = 180^\circ - 158^\circ$$

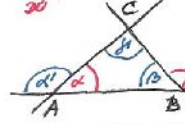
$$\gamma = 22^\circ$$

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\beta' = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$$

b) první vnější a druhý vnitřní $\alpha = 72^\circ, \beta' = 86^\circ$



$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \beta' = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha' + \beta) = 180^\circ - (108^\circ + 94^\circ) = 180^\circ - 166^\circ = 14^\circ$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 14^\circ = 166^\circ$$

c) první vnitřní a druhý vnější $\alpha' = 72^\circ, \beta = 86^\circ$



$$\alpha = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

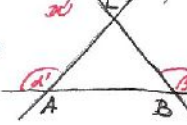
$$\beta' = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (108^\circ + 94^\circ)$$

$$> 180^\circ \text{ NEZDE}$$

$\Rightarrow$ ÚLOHA NEMÁ ŘEŠENÍ

d) oba vnitřní $\alpha' = 72^\circ, \beta' = 86^\circ$



$$\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

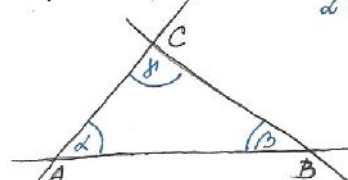
2 TUPÉ ÚHLY VNITŘNÍ - NEZDE

$$[\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (108^\circ + 94^\circ) \text{ NEZDE}]$$

$\Rightarrow$ ÚLOHA NEMÁ ŘEŠENÍ

- 129 $\textcircled{2}$ Vnitřní úhly Δ mají velikosti v poměru 2:3:5. V jakém poměru jsou velikosti jeho vnějších úhlů?

$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 5$ vypočítáme poměr vnějších úhlů



10 dílů

$$\alpha = \frac{2}{10} \cdot 180^\circ = 36^\circ \Rightarrow \alpha' = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

(2 dle úhly ne 180°)

$$\beta = \frac{3}{10} \cdot 180^\circ = 54^\circ \Rightarrow \beta' = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$$

$$\gamma = \frac{5}{10} \cdot 180^\circ = 90^\circ \Rightarrow \gamma' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

[NEBO 1 díl ... $\frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$
 $\Rightarrow$ 2 díly, 3 díly, 5 dílů]

$\alpha' : \beta' : \gamma' = 144^\circ : 126^\circ : 90^\circ$ KRÁTÍ

$48^\circ : 42^\circ : 30^\circ$

$(24^\circ : 21^\circ : 15^\circ)$

$8 : 7 : 5$

$\alpha' : \beta' : \gamma' = 8 : 7 : 5$

- 130 $\textcircled{3}$ Mnozí vnější úhly Δ platí $\alpha = 2\beta, \beta = 3\gamma$. Vypočítejte je.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 3\gamma = 6\gamma$$

$$\beta = 3\gamma$$

$$6\gamma + 3\gamma + \gamma = 180^\circ$$

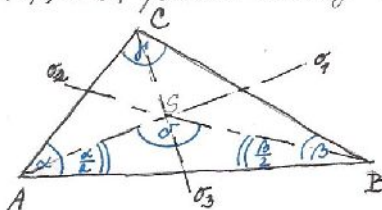
$$10\gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 18^\circ$$

$$\beta = 3\gamma = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$$

$$\alpha = 6\gamma = 6 \cdot 18^\circ = 108^\circ$$

- 131 $\textcircled{4}$ Úhly vnějších úhlů ΔABC se protínají v bodě S. Vypočítejte velikost úhlů $\sigma = \angle ASB, \tau = \angle ASC, \nu = \angle BSC$.



$$\sigma = \angle ASB$$

$$\sigma = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sigma = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)$$

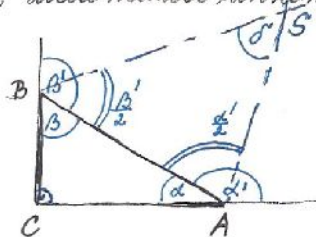
$$\sigma = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

- 5) Dvě množiny úhlů pravouhlého $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) při vrcholech A, B se protínají v bodě S .
1.32 Určete velikost konvexního úhlu ASB .



$$\sigma = |\angle ASB|$$

$$\sigma = 180^\circ - \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2}\right)$$

$$\sigma = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\sigma = 45^\circ$$

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

$$\beta + \beta' = 180^\circ$$

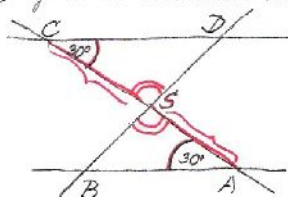
$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ (RA)}$$

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360^\circ$$

$$90^\circ + \alpha' + \beta' = 270^\circ$$

$$\frac{\alpha' + \beta'}{2} = 135^\circ$$

- 6) Bod S je středem úsečky AC a body B, S, D leží v této přímce. Zvažte, že bod S
1.40 je také středem úsečky BD .



$$|CS| = |AS|$$

(s)

$$|\angle CSD| = |\angle ASB|$$

(u)

(vrcholové)

$$|\angle BAS| = |\angle DCS| = 30^\circ$$

(u)

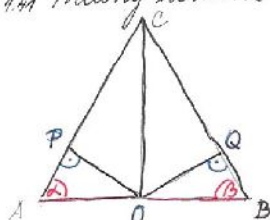
$$\triangle ASB \cong \triangle CSD \text{ (usu)}$$

$$\Rightarrow |BS| = |DS| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \text{ střed úsečky } BD$$

obd.

- 7) Je dán rovnoramenný $\triangle ABC$, bod O je středem základny AB . Bodem O jsou
1.44 vedeny kolmice k raménům AC a BC , jejich paty jsou P, Q . Zvažte, že $\triangle APO \cong \triangle BQO$.



$$|AO| = |BO| \text{ (O střed AB)}$$

(s)

$$|\angle APO| = |\angle BQO| = 90^\circ$$

(u)

$$|\angle PAO| = |\angle QBO|$$

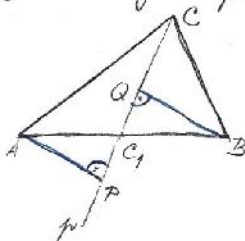
$$\alpha = \beta$$

(u)

$$\triangle APO \cong \triangle BQO \text{ (ssu)}$$



- 8) Je dán $\triangle ABC$, p je přímka, v níž leží střed C daného $\triangle$. Zvažte, že body
1.43 A a B mají od přímky p stejnou vzdálenost.



med. A (B) od $p \Rightarrow$ kolmice na p bodem A (B) $\Rightarrow$ paty P (Q)

$\Rightarrow |Ap| = |Bp|, |Bp| = |BQ|$, tedy musíme dokázat,

$$|Ap| = |BQ|$$

(dok. shodnost $\triangle AC_1P, \triangle BC_1Q$)

$$C_1 \text{ střed } AB \Rightarrow |AC_1| = |BC_1|$$

(s)

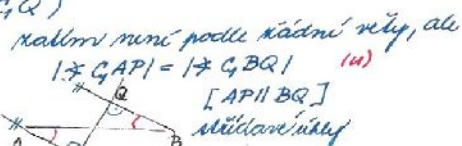
$$|\angle AC_1P| = |\angle BC_1Q|$$

(u)

$$|\angle APC_1| = |\angle BQC_1| = 90^\circ$$

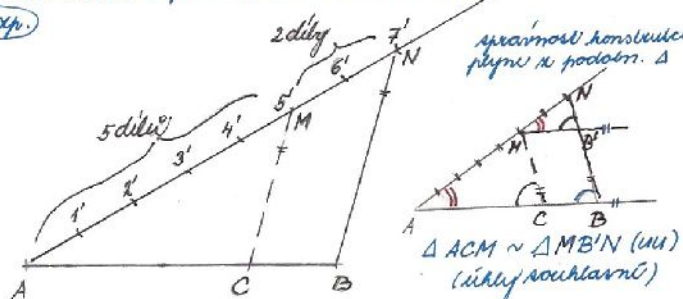
(u)

$$\Rightarrow \triangle AC_1P \cong \triangle BC_1Q \text{ (usu)} \Rightarrow |AP| = |BQ| \Rightarrow |Ap| = |Bp| \text{ obd.}$$

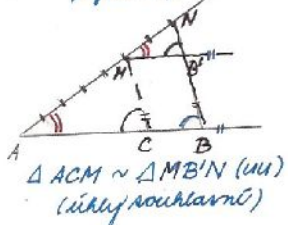


- 9) Rameno úsečky AB rozdělí bodem C tak, aby platilo $|AC| : |CB| = m : n (= 5 : 2)$
1.45 kde m i n při dělení má stejnou délkou

1. xpr.



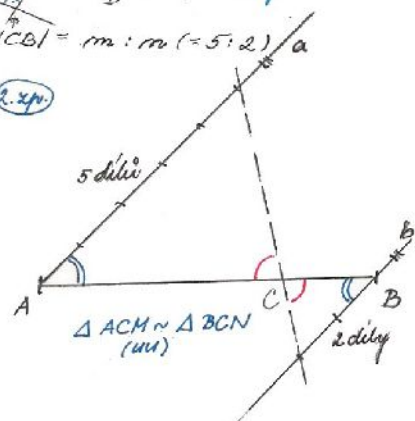
správnost konstrukce plyne z podobn. $\triangle$



$$\triangle ACM \sim \triangle MB'N \text{ (uu)}$$

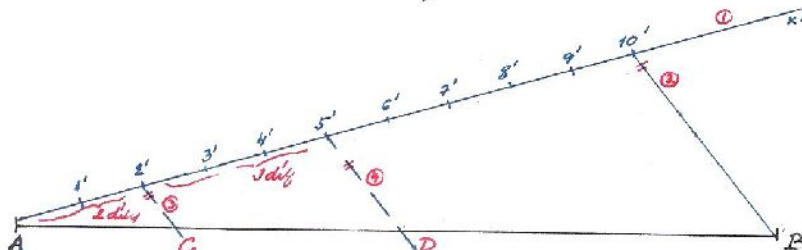
(úhly vrcholové)

2. xpr.

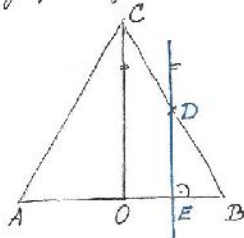


$$\triangle ACM \sim \triangle BCN \text{ (uu)}$$

152. (10) Úsečku AB ($|AB| = 12 \text{ cm}$) rozdělí body C, D a poměry $|AC| : |CD| : |DB| = 2 : 3 : 5$.

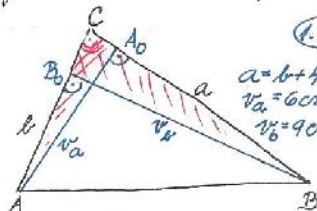


- (11) V rovnoramenném trojúhelníku $\triangle ABC$ je středem D ramene BC kolmice k kolmá na AB , jejíž protíná E . Zohledně, že platí: $|AE| = \frac{3}{4}|AB|$.



body $C \parallel ADE$, o střed AB
 $\triangle COB \sim \triangle DEB$ (uu) $\Rightarrow \frac{|BE|}{|BO|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |BE| = \frac{1}{2}|BO| = \frac{1}{4}|AB|$
 $|AE| = |AB| - \frac{1}{2}|BO| = |AB| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| = |AB| - \frac{1}{4}|AB| = \frac{3}{4}|AB|$
 ctd.

- (12) Určete délky stran c, b $\triangle ABC$, je-li strana $a = 4 \text{ cm}$ delší než strana b , výška $v_a = 6 \text{ cm}$, výška $v_b = 9 \text{ cm}$.



(1.4p) N. rovnosti $S_a = S_b$

$$\begin{aligned} a &= b+4 \\ v_a &= 6 \text{ cm} \\ v_b &= 9 \text{ cm} \\ \frac{1}{2}av_a &= \frac{1}{2}bv_b \\ av_a &= bv_b \end{aligned}$$

(2.4p) $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$ (uu) $AA_1 \parallel BB_1$

$$\frac{v_a}{b} = \frac{v_b}{a}$$

$$av_a = bv_b$$

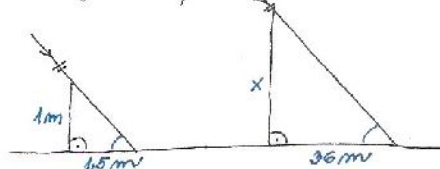
$$\begin{aligned} (b+4)6 &= 9b \\ 6b+24 &= 9b \end{aligned}$$

$$3b = 24$$

$$b = 8 \text{ cm}$$

$$a = b+4 = 8+4 = 12 \text{ cm}$$

- (13) Vrchol mřížová tyč má šírku 150 cm dlouhý. Vypočítejte výšku sloupce, jehož šírka je 36 cm dlouhý.



podobní $\triangle$ (uu) prameny světla + sloup rovnoběžný

$$\frac{x}{1} = \frac{36}{150}$$

$$150x = 36$$

$$x = 24 \text{ cm}$$

- (14) Určete skutečnou rozměry, jestliže na pláně má měřítko 1:5000 mají délky 32,5 mm a 41 cm.

a) plán: skute. = plán: skute.

$$1:5000 = 32,5(\text{mm}):x(\text{mm})$$

$$\frac{1}{5000} = \frac{32,5}{x}$$

$$x = 32,5 \cdot 5000 \text{ mm}$$

$$x = 32,5 \cdot 5 \text{ m} = 162,5 \text{ m}$$

b) plán: skute. = plán: skute.

$$1:5000 = 41(\text{cm}):x(\text{cm})$$

$$\frac{1}{5000} = \frac{41}{x}$$

$$x = 41 \cdot 5000(\text{mm})$$

$$x = 41 \cdot 5 \text{ m}$$

$$x = 20,5 \text{ m}$$

POROVNÁVÁNÍ JEDNOTEK

- (15) Určete skutečnou rozměry, jestliže 1,6 km na skutečnosti je na mapě zastaveno jako 32 mm.

plán: skute. = plán: skute.

$$1:x = 32:1600000$$

$$\frac{1}{x} = \frac{32}{1600000}$$

$$1600000 = 32x$$

$$x = \frac{1600000}{32} = 50000$$

$$x = 50000$$

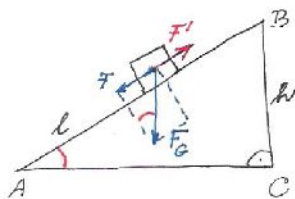
$$1,6 \text{ km} = 1600 \text{ m} = 1600000 \text{ mm}$$

$$\left[\frac{32}{1600000} = \frac{2}{100000} = \frac{1}{50000} \right]$$

POROVNÁVÁNÍ JEDNOTEK

MĚŘÍTKO: 1:50000

- 16) Barva a hmotnost 150 kg je klíba malá do výšky 110 cm po silné desce dlouhé 4,2 m.
1.50 jaká síla je k tomu zapotřebí?



minimální působící silou F'



podobný Δ

$$|\vec{F}| = |\vec{F}'| \quad \vec{F}' = -\vec{F}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{F_g}{F}$$

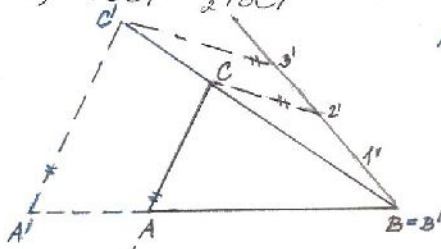
$$Fl = F_g h$$

$$F = \frac{F_g h}{l} = \frac{mg h}{l} = \frac{150 \cdot 10 \cdot 1,1}{4,2} \text{ N} = 750 \text{ N}$$

$$h = 110 \text{ cm}, l = 4,2 \text{ m} = 4,2 \text{ m}$$

$$[\text{proto } W_{AB} = W_{CB} \Rightarrow Fl = F_g h] \\ (W = F_g)$$

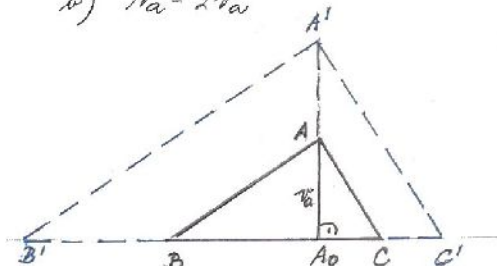
- 17) Postavte $\Delta A'B'C'$ podobný ΔABC tak, aby
1.54 a) $|B'C'| = \frac{3}{2}|BC|$



využitím podobnosti [stejnolehlosti $\mathcal{H}(B; \kappa = \frac{3}{2})$]

1. $\Delta ABC, B' = B$
2. úsečku BC rozšířit v poměru 3:2 $\rightarrow C' \in \rightarrow BC$
3. $p, p \parallel AC$ bodem C'
4. $A', A' \in \rightarrow BA \cap p$

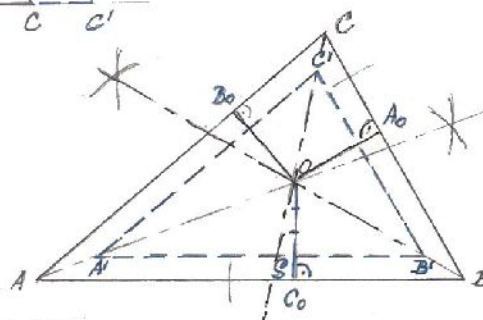
$$b) |A'A| = 2|AA'|$$



využitím podobnosti [stejnolehlosti $\mathcal{H}(A_0; \kappa = 2)$]

viz dále (2. část Planimetrie na konci úlohami)

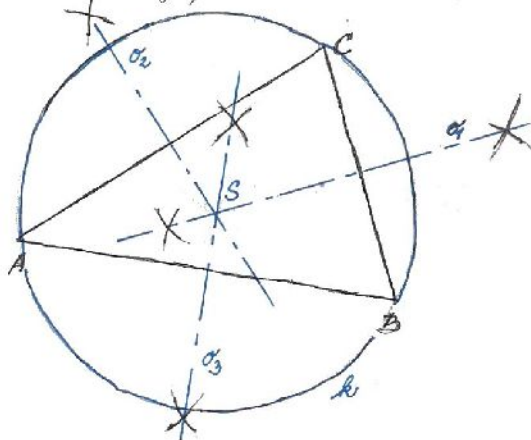
$$c) \varphi' = \frac{3}{4}\varphi$$



využití podobnosti [stejnolehlosti $\mathcal{H}(O; \kappa = \frac{3}{4})$]

- 18) Postavte kružnici ΔABC

a) opřanou
- střed S je průsečík OS STRAN



b) opřanou
- střed O je průsečík OS ÚHLŮ

